

## Лекция 2 Исследование атмосферных процессов - как математический и вычислительный процесс. Основные физические законы и их математическое выражение. Уравнения гидротермодинамики для идеальной атмосферы.

Цель: Объяснить виды основных сил, действующих на атмосферу, применение основных законов физики для моделирования атмосферных процессов и показать их математическое выражение. Вывести уравнения гидротермодинамики для идеальной атмосферы. Безразмерные величины.

## силы, действующие на частицу атмосферного воздуха

Рассмотрим силы, действующие на частицу атмосферного воздуха, которые должны быть включены в уравнение движения этой частицы, представляющее собой (в векторной форме) формулировку второго закона Ньютона:

$$\frac{dU}{dt} = \sum F \quad (2.1)$$

– **Сила градиента давления:**

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.2)$$

Сила градиента давления, величина которой имеет размерность  $\text{м/с}^2$ , действует на частицу в неоднородном поле давления. По вертикали ее составляющая много больше, чем по горизонтали, и почти уравновешивается:

силы, действующие на частицу атмосферного воздуха

– *силой тяжести*

$$G = \{0, 0, -g\} \quad (2.3)$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести, направленное вниз и равное силе гравитационного притяжения минус центробежная сила, обусловленная вращением Земли. Эта последняя очень мала в сравнении с силой гравитационного притяжения (равна  $\omega^2 r$ , где  $r$  – радиус вращения на данной широте  $\varphi$ ) : здесь  $r = R \cos \varphi$  ;  $R$  – радиус Земли;  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли). Поэтому  $g$  может считаться постоянным;

силы, действующие на частицу атмосферного воздуха

– **сила Кориолиса, или отклоняющая сила вращения Земли:**

Эта сила появляется в уравнениях относительного движения (относительно Земли) и есть фиктивная сила, описывающая эффект движения системы координат, связанных с Землей.

$$K = -2\omega \times U \quad (2.4)$$

– **сила трения**

$$T = \vartheta \nabla^2 U \quad (2.5)$$

где  $\nabla^2$  – трехмерный оператор Лапласа. Трение, или вязкость, в атмосфере бывает молекулярным и турбулентным. Молекулярное трение пренебрежимо в сравнении с турбулентным, а турбулентное трение анизотропно: в горизонтальном направлении его коэффициент  $\vartheta_1$  можно считать постоянным, а в вертикальном –  $\vartheta_2$  зависит от вертикальной координаты.

## Уравнения динамики атмосферы

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + \vartheta_1 \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial z} \vartheta_2 \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \vartheta_1 \nabla^2 v + \frac{\partial v}{\partial z} \vartheta_2 \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \vartheta_1 \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial z} \vartheta_2 \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho)}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu_1 \nabla^2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} \mu_2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \varepsilon \quad (2.8)$$

Эта система дополняется двумя алгебраическими уравнениями:  
уравнением состояния:

$$p = \rho RT$$

и уравнением Пуассона для потенциальной температуры:

$$\frac{T}{\theta} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}} \quad (2.9)$$

Теперь имеем семь уравнений относительно семи неизвестных функций:

$$u, v, w, p, T, \rho, \theta$$

# Геострофический ветер

Выделим простейший случай: рассмотрим стационарный, невязкий зональный поток. Вместо системы (2.6) получится

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu \\0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\p &= \rho RT \\ \frac{T}{\theta} &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

## Свободной атмосферой

называется слой, в котором силой трения можно в целом пренебречь. В отличие от свободной атмосферы, слой, в котором трение (турбулентное) играет роль, сравнимую с силой градиента давления, называется пограничным слоем. Это нижний слой, примыкающий к подстилающей поверхности.

$$\begin{aligned} l u \rho &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ g \rho &= - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

продифференцируем первое уравнение по  $z$ , второе по  $y$  и вычтем, после этого, опуская выкладки, получим:

$$l \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{g}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.12)$$

Это известное соотношение термического ветра: вертикальный сдвиг ветра в геострофическом потоке пропорционален горизонтальному градиенту температуры. Баланс термического ветра имеет место благодаря вращению Земли.

## Соотношение сил. Безразмерные параметры

В зависимости от масштабов движения соотношение сил может меняться. На этом основании в одних задачах учитываются одни силы, в других – другие. Соотношения сил количественно оцениваются безразмерными соотношениями их характерных значений.

Отношение силы инерции к силе Кориолиса называется числом Россби:

$$Ro = \frac{dU/dt}{lU} = \frac{U^2}{LlU} = \frac{U}{Ll} \quad (2.14)$$

безразмерное число Рейнольдса для горизонтальной турбулентной вязкости:

$$Re = \frac{UL}{\vartheta} \quad (2.15)$$

Соотношение между турбулентной вязкостью и теплопроводностью дается числом Прандтля<sup>^</sup>

$$Pr = \frac{\vartheta_2}{\mu_2} \quad (2.18)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите силы, действующие в атмосфере;
2. Назовите физические законы, действующие для описания атмосферных процессов;
3. Выпишите математические выражения названных законов;
4. Назовите некоторые простейшие приближения для описания движений в атмосфере;
5. Назовите безразмерные параметры и их физический смысл.

## Тестирование ПЗ2

3.2 If  $u = -5 \text{ m s}^{-1}$  and  $v = +5 \text{ m s}^{-1}$ , write out the horizontal velocity vector, determine the horizontal wind speed, and name the wind.

3.2 Если  $u = -5 \text{ м/с}$  и  $v = +5 \text{ м/с}$ , определите абсолютную величину горизонтальной скорости ветра.

**3.5** Assume that a grid cell has dimension  $\Delta x = 5 \text{ km}$ ,  $\Delta y = 4 \text{ km}$ , and  $\Delta z = 0.1 \text{ km}$  and that the west, east, south, north, and lower scalar velocities are  $u_1 = +3$ ,  $u_2 = +4$ ,  $v_3 = -3$ ,  $v_4 = +2$ , and  $w_5 = +0.2 \text{ m s}^{-1}$ . If the atmosphere is incompressible, what is  $w$  at the top of the cell?

**3.5** Предположим, что ячейка сетки имеет размер  $\Delta x = 5 \text{ км}$ ,  $\Delta y = 4 \text{ км}$  и  $\Delta z = 0,1 \text{ км}$  и что западная, восточная, южная, северная и нижняя скалярные скорости равны  $u_1 = +3$ ,  $u_2 = +4$ ,  $v_3 = -3$ ,  $v_4 = +2$  и  $w_5 = +0,2 \text{ м/с}$ . Если атмосфера несжимаемая, найдите значение  $w$  наверху ячейки?

**4.4** Assume a grid cell has dimension  $\Delta x = 5 \text{ km}$ ,  $\Delta y = 4 \text{ km}$ , and  $\Delta z = 0.1 \text{ km}$ , and assume the west, east, south, north, lower, and upper boundary scalar velocities are  $u_1 = +2$ ,  $u_2 = +3$ ,  $v_1 = +1$ ,  $v_2 = -3$ ,  $w_1 = +0.03$ , and  $w_2 = +0.04 \text{ m s}^{-1}$ , respectively. Estimate the magnitude of the divergence term of the local acceleration ( $\nabla \mathbf{U}$ ).

**4.4** Предположим, что ячейка сетки имеет размер  $\Delta x = 5 \text{ km}$ ,  $\Delta y = 4 \text{ km}$ ,  $\Delta z = 0.1 \text{ km}$ , и предположим, что скалярные скорости на западной, восточной, южной, северной, нижней и верхней границах равны  $u_1 = +2$ ,  $u_2 = +3$ ,  $v_1 = +1$ ,  $v_2 = -3$ ,  $w_1 = +0.03$ , and  $w_2 = +0.04 \text{ m/s}$  соответственно. Оцените величину дивергенции члена местного ускорения ( $\nabla \mathbf{U}$ ).

ССЫЛКА ПЗ2 ДЛЯ РУС-КАЗ ГРУПП

[https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfxKtUfV9qNNlmykY2XVYoQl2elv-ei7QxgDTmIDPflg61\\_5A/viewform?usp=sf\\_link](https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfxKtUfV9qNNlmykY2XVYoQl2elv-ei7QxgDTmIDPflg61_5A/viewform?usp=sf_link)

ССЫЛКА ПЗ2 ДЛЯ АНГЛ ГРУППЫ

[https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfoQCfm6GDoqLBvngmhtK-UyEeqB\\_X7eJckFbqYcl6jYvV0zQ/viewform?usp=sf\\_link](https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfoQCfm6GDoqLBvngmhtK-UyEeqB_X7eJckFbqYcl6jYvV0zQ/viewform?usp=sf_link)